INGO´S konjugierte Verwandtschaft

Eckart Schmidt

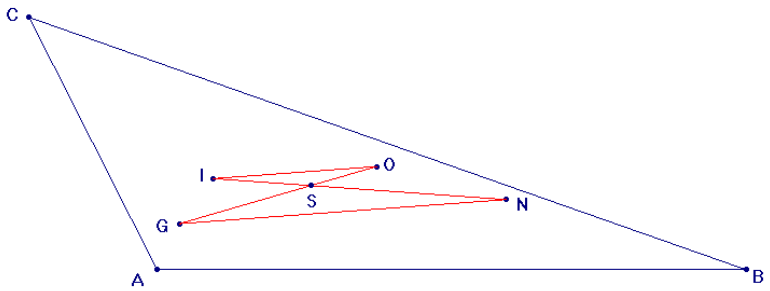

Abb.1

Untersucht wird die bekannte trapezförmige Punktekonstellation *INGO* eines Dreiecks, die aus dem Inkreismittelpunkt *I*, dem Nagel-Punkt *N*, dem Gergonne-Punkt *G* und dem Mittenpunkt *O* besteht (Abb.1). Inkreismitte und Nagel-Punkt als auch Mittenpunkt und Gergonne-Punkt bilden Nagelsche Punktepaare, d.h. der Schwerpunkt *S* teilt die Verbindungsstrecke im Verhältnis 1:2. Es werden Zusammenhänge zwischen isotom-konjugierten Bildelementen aufgezeigt, die eine gewisse „Symmetrie“ erkennen lassen. Neben der isotomen Konjugation werden die isogonale Konjugation nur am Rande und weitere Konjugationen erst zur Abrundung der Ergebnisse angesprochen. Punkte werden in baryzentrischen Koordinaten protokolliert und ihr ETC-Index nach der „encyclopedia of triangle centers“ angegeben:

$I(a : b : c) = X(1)$

Inkreismitte im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden;

$N(-a+b+c : a-b+c : a+b-c) = X(8)$

Nagelpunkt im Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den gegenüberliegenden Ankreisberührpunkten;

$G((a-b+c)(a+b-c) : (-a+b+c)(a+b-c) : (-a+b+c)(a-b+c))= X(7)$

Gergonne-Punkt im Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den gegenüberliegenden Inkreisberührpunkten;

$O(a(-a+b+c) : b(a-b+c) : c(a+b-c)) = X(9)$

Mittenpunkt im Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von Ankreismitten und zugehörigen Seitenmitten;

$S(1 : 1 : 1) = X(2)$

Schwerpunkt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Zu einem Punkt P erhält man das isotom-konjugierte Bild P^, indem man die Schnittpunkte der P-Ecktransversalen mit der Gegenseite am Mittelpunkt der Gegenseite spiegelt und erneut den Schnittpunkt der Ecktransversalen betrachtet:

$$P(u : v : w) \;\rightarrow\; P^\wedge(vw : wu : uv).$$

1. Der Schwerpunkt ist zu sich selbst isotom-konjugiert; Nagel- und Gergonne-Punkt sind isotom-konjugierte Partner; erst die isotom-konjugierten Bilder der Inkreismitte und des Mittenpunktes liefern zwei neue Punkte

$$I^\wedge(bc : ca : ab) = X(75) \text{ und}$$

O^(bc(a-b+c)(a+b-c) : ca(-a+b+c)(a+b-c)
: ab(-a+b+c)(a-b-c)) = X(85)

auf der Verbindungsgeraden *NG* von Nagel- und Gergonne-Punkt (Abb.2).

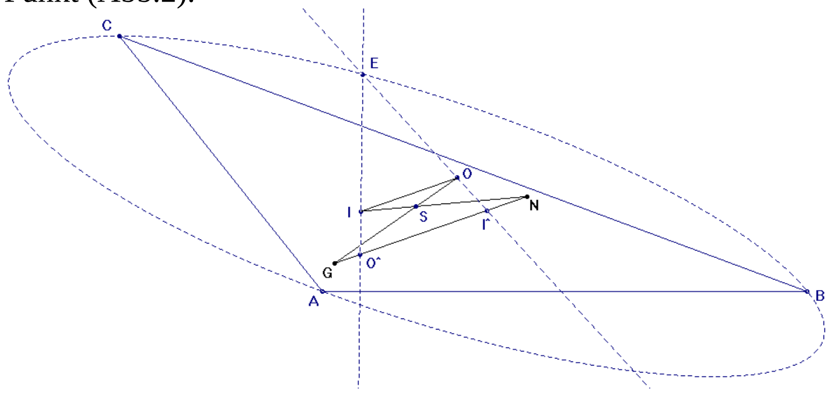

Abb.2

2. Die Verbindungsgeraden *IO^* und *I^O* schneiden sich in einem Punkt

E(bc(a²+b²-ac-bc)(a²+c²-ab-bc) : …),

der auf der S-zentrierten Umellipse des Dreiecks *ABC* liegt. Das isotom-konjugierte Bild dieser Ellipse ist die Ferngerade; dabei ist das isotom-konjugierte Bild von *E* der gemeinsame Fernpunkt der parallelen Geraden IO und NG:

E^(a(b²+c²-ab-ac) : b(a²+c²-ab-bc) : c(a²+b²-ac-bc)) .

3. Die isotome Konjugation bildet Geraden auf Umkegelschnitte des Dreiecks ab. Das isotom-konjugierte Bild der Geraden *NG* liefert eine gleichseitige Umhyperbel des Dreiecks *ABC* durch die Punkte *I, N, G, O* (Abb.3) – kurz als *NG*-Hyperbel angesprochen – mit der Gleichung

$$(a-b)(a+b-c)cxy+(b-c)(-a+b+c)ayz+(c-a)(a-b+c)bzx=0\,.$$

Auf einer gleichseitigen Umhyperbel eines Dreiecks liegt immer der Höhenschnittpunkt

H((a²-b²+c²)(a²+b²-c²) : ...) = X(4),

und das Zentrum der Hyperbel liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis, in diesem Fall im Feuerbach-Punkt

Z((b-c)²(-a+b+c) : …) = X(11),

d.h. dem Berührpunkt von In- und Neun-Punkte-Kreis.
Nach 2 liegt auch der Ellipsenpunkt E auf der *NG*-Hyperbel.

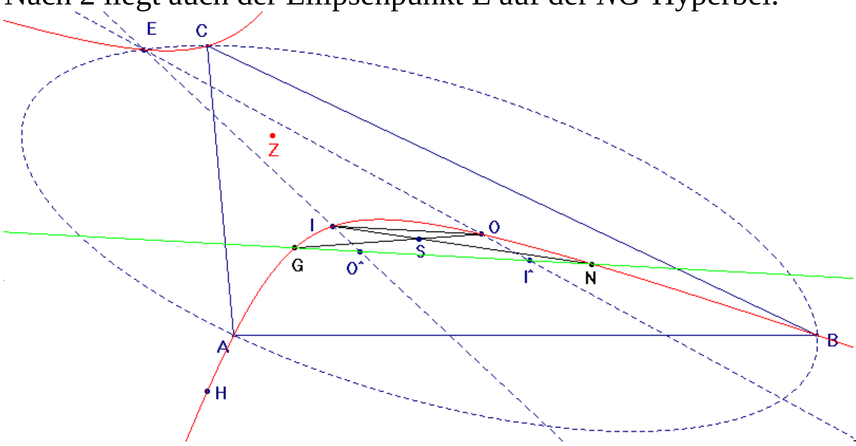

Abb.3

4. Zur weiteren Anreicherung der Figur sei der Lemoine-Punkt

$$L(\, a^2 : b^2 : c^2 \,) = X(6)$$

als „naher Verwandter“ des Schwerpunktes herangezogen. Der Lemoine-Punkt ist das isogonal-konjugierte Bild des Schwerpunktes, man erhält ihn, wenn man die Seitenhalbierenden an den zugehörigen Winkelhalbierenden spiegelt und den Schnittpunkt dieser sogenannten Symmediane betrachtet. Der Lemoine-Punkt L liegt auf der Geraden *IO* und bildet mit dem isotom-konjugierten Bild des Höhenschnittpunkts

$$H\hat{}(\, -a^2+b^2+c^2 : a^2-b^2+c^2 : a^2+b^2-c^2 \,) = X(69)$$

auf *NG* ein Nagelsches Punktepaar.
Die Verbindungsgerade des Nagelpunktes *N* mit dem isotom-konjugierten Bild

$L\hat{}(\, b^2c^2 : c^2a^2 : a^2b^2 \,) = X(76)$ (dritter Brocard-Punkt)

des Lemoine-Punktes verläuft ebenfalls durch den Ellipsenpunkt E (Abb.4).

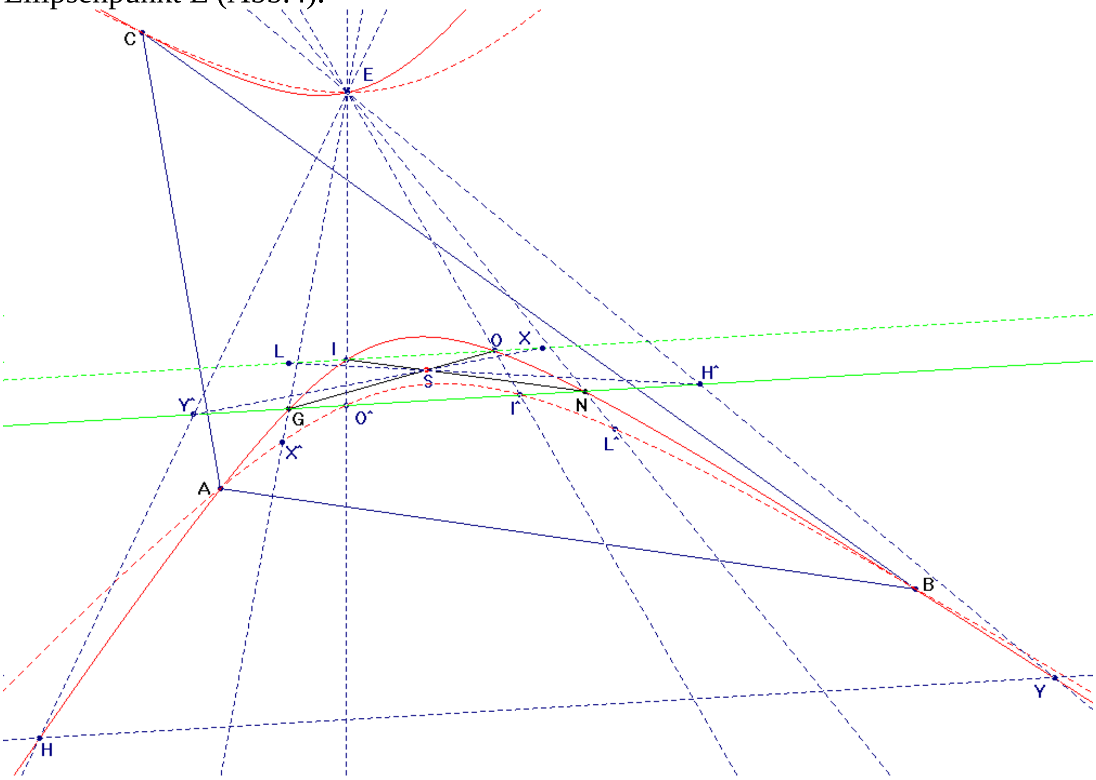

Abb.4

5. Die bisherige Figur soll „symmetrisch“ ergänzt werden:
Das isotom-konjugierte Bild der Geraden *NG* war die *NG*-Hyperbel; das isotom-konjugierte Bild der Geraden *IO* sei die *I^O^*-Hyperbel. Der Schnittpunkt der Geraden *EN* mit der *I^O^*-Hyperbel ist *L^*; der Schnittpunkt der Geraden *EG* mit der *I^O^*-Hyperbel sei

$$X\hat{}(\, b^2c^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 : \ldots \,).$$

Dann ist

$$X(\, a^2(-a^2+b^2+c^2)^2 : b^2(a^2-b^2+c^2)^2 : c^2(a^2+b^2-c^2) \,) = X(220)$$

Ein Punkt der Geraden *IO* (Abb.4).

Der Punkt L wird durch H^ zu einem Nagelschen Punktepaar ergänzt; der Punkt X möge durch den Punkt

$$Y\hat{}\,(\,(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac) : \ldots\,)$$

auf NG zu einem Nagelschen Punktepaar ergänzt werden. Dann ist

$$Y(\,(-a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc)(a^2+b^2+c^2-2ac-2bc) : \ldots\,)$$

ein Punkt auf der NG-Hyperbel. Die Gerade HY ist parallel zu NG und die Geraden HY^ und H^Y verlaufen ebenfalls durch den Ellipsenpunkt E (Abb.4).

6. Die Punkte X und Y ordnen sich noch unter anderen Gesichtspunkten in die obige Figur ein:
Betrachtet man die Punkte $I´ = X(37)$ und $O´$ auf IO, die I^ und O^ zu Nagelschen Punktepaaren ergänzen, so liegen jetzt auf IO und NG jeweils sechs Punkte, für die folgende Quadrupel in harmonischer Lage sind (Abb5):

$$(I\ ,\ O\ ;\ O´\ ,\ X)\ ,\qquad (N\ ,\ G\ ;\ O\hat{}\ ,\ Y\hat{}\,)$$
$$(I\ ,\ O\ ;\ I´\ ,\ L)\ ,\qquad (N\ ,\ G\ ;\ I\hat{}\ ,\ H\hat{}\,).$$

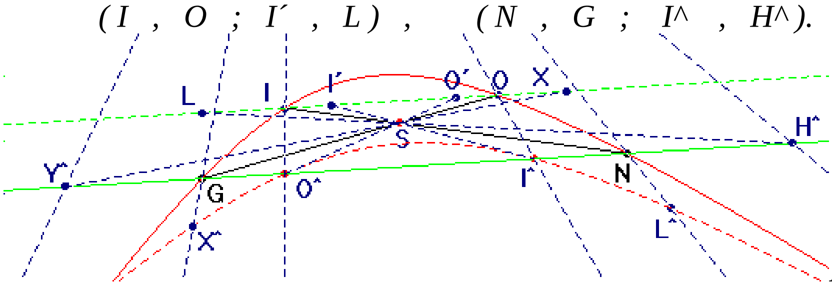

Abb.5

7. Eine weitere geometrische Einordnung des Punktes X sei angeführt:
Der Schnittpunkt der Geraden IG und ON sei $D = X(390)$, auch Spiegelpunkt von G an I bzw. N an O. Die Gerade IG schneidet SO^ in X* und die Gerade ON schneidet die Gerade SI^ in X*^, wobei * die isogonale Konjugation kennzeichnet. Die Geraden X^X* und L^X*^ schneiden sich in einem Punkt Q auf NG, dessen Verbindungsgerade mit D wieder durch den Ellipsenpunkt E geht.

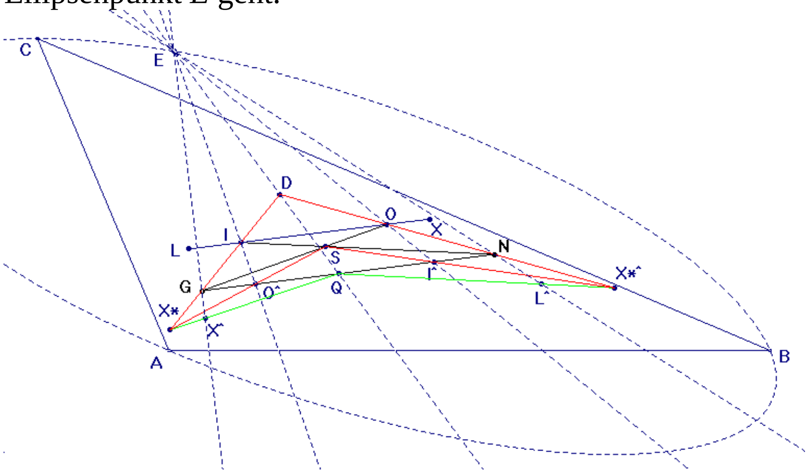

Abb.6

8. Abschließend soll die erkennbare „Symmetrie“ hinterfragt werden. Was auf der „einen Seite“ der Lemoine-

Punkt L nach sich zieht, bewirkt auf der „anderen Seite“ der Punkt X. Ist der Lemoine-Punkt das isogonal-konjugierte oder I-konjugierte Bild des Schwerpunktes, so erweist sich der Punkt X als O-konjugiertes Bild des Schwerpunktes nach der Abbildungsvorschrift $P(u : v : w)$

$$\to P°(a^2(-a+b+c)^2vw : b^2(a-b+c)^2wu : c^2(a+b-c)^2uv).$$

Für jeden Punkt P gilt $P°{*}{\wedge} = P{\wedge}{*}°$. Damit wird die „Symmetrie“ durchschaubar:

$L = S^*$, $L^\wedge = S^{*\wedge}$, $X^{*\wedge} = S^{*°}$;
$X = S°$, $X^\wedge = S^{°\wedge}$, $X^* = S^{°*}$.

So wie L und X sich im Sinne der angedeuteten “Symmetrie“ entsprechen, sind auch H und Y einander zuzuordnen, denn $H^\wedge$ und $Y^\wedge$ ergänzen L und X zu Nagelschen Punktepaaren.
Bildet man die Gerade NG erst isogonal-, dann O-konjugiert ab, so erhält man die Tangente in N an die NG-Hyperbel mit $G^{*°} = N$. Bildet man die Gerade NG erst O-, dann isogonal-konjugiert ab, so erhält man die Tangente in G an die NG-Hyperbel mit $N^{°*} = G$.

9. Eine weitere Konjugation möge die Zusammenhänge abrunden:
In der Punktekonstellation $INGO$ vertauscht die isotome Konjugation die Punkte N und G; ergänzend sei eine Konjugation betrachtet, die die Punkte I und O vertauscht:

$$P(u : v : w)\to P^{\sim}(a^2(-a+b+c)vw : b^2(a-b+c)wu : c^2(a+b-c)uv).$$

Z.B. ist das Bild des Schwerpunktes der Pol der Geraden IO bezüglich der NG-Hyperbel. Die IO-Konjugation bildet den Nagel-Punkt auf den Lemoine-Punkt ($N^{\sim} = L$) und den Gergonne-Punkt auf den Punkt X ab ($G^{\sim} = X$); weiterhin wird die Gerade IO auf die NG-Hyperbel abgebildet.
Das Hintereinanderausführen der IO-Konjugation und der isotomen Konjugation bildet die Gerade IO auf die Gerade NG und die NG-Hyperbel auf die $I^\wedge O^\wedge$-Hyperbel ab:

P	I	N	G	O	L	X
$P^{\sim\wedge}$	$O^\wedge$	$L^\wedge$	$X^\wedge$	$I^\wedge$	$N^\wedge$	$G^\wedge$

10. Es sei die NG-Hyperbel nochmals näher betrachtet, vorerst nur die Verbindungsgerade ZS ihres Zentrums Z mit dem Schwerpunkt S. Auf ZS liegen offensichtlich der Schnittpunkt der Geraden IG und ON, die Seitenmitten von $\overline{IO}$, $\overline{NG}$, $\overline{HY}$ und die Pole der Geraden IO, NG, HY, aber auch $E^{\wedge *}$ und $E^{\wedge\sim}$, das isogonal- und das IO-konjugierte Bild des Fernpunktes $E^\wedge$ der Geraden NG sowie der Punkt

$$F(a(a-b)(a-c) : b(b-a)(b-c) : c(c-a)(c-b)) = X(100),$$

der Z zu einem Nagelschen Punktepaar ergänzt (Abb.7).

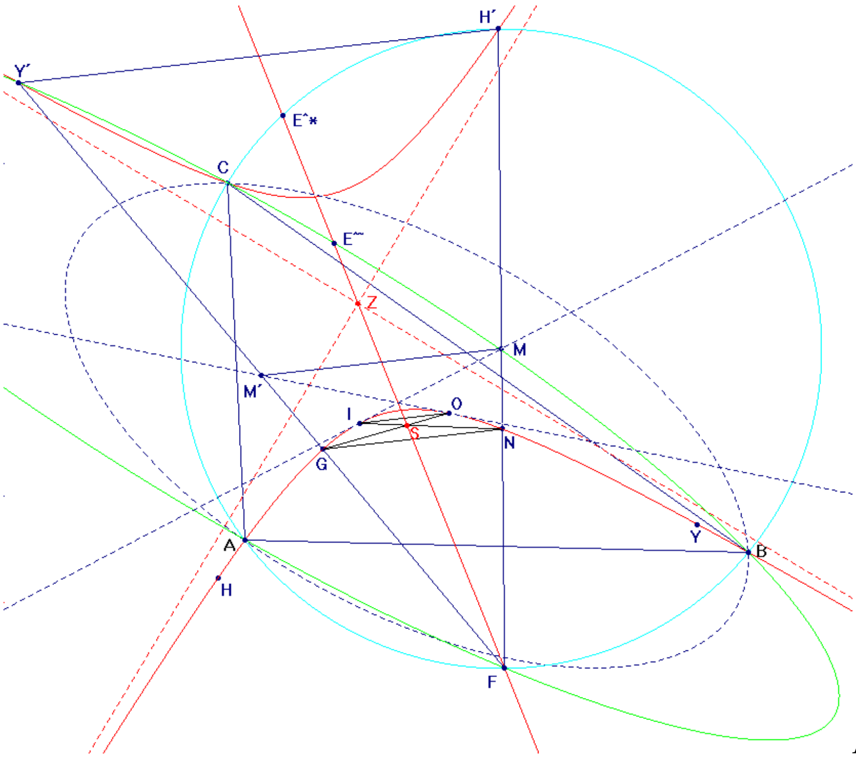

Abb.7

11. Die Ferngerade wird isogonal-konjugiert auf den Umkreis k des Dreiecks abgebildet; der Umkreismittelpunkt

$$M(\, a^2(-a^2+b^2+c^2) : b^2(a^2-b^2+c^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)\,) = X(3)$$

liegt im Mittelpunkt von F und dem Spiegelpunkt *H´* von *H* an *Z* bzw. im Schnittpunkt der Geraden *FN* mit der Tangente in *I* an die *NG*-Hyperbel.
Die Ferngerade wird durch die *IO*-Konjugation auf eine Ellipse *k´* mit dem Zentrum *M´* abgebildet; dieses Zentrum *M´* liegt im Mittelpunkt von *F* und dem Spiegelpunkt *Y´* von *Y* an *Z* bzw. im Schnittpunkt der Geraden *FG* mit der Tangente in *O* an die *NG*-Hyperbel.
Für die Zentren *M* und *M´* gilt *M* = *H** und *M´* = *Y*°, ihre Verbindungsgerade *MM´* ist parallel zu *NG*.
Der Punkt *F* erweist sich somit als vierter Schnittpunkt des Umkreises k mit der Ellipse *k´*; die Punkte *E*^* und *E*^˜ sind die vierten Schnittpunkte von *k* und *k´* mit der *S*-zentrierten Umellipse des Dreiecks (Abb.7).

12. Der Punkt F besitzt weitere Inzidenzeigenschaften. Verbindet man

I	mit dem Spiegelpunkt *N´* von *N* an *Z*,
N	mit dem Spiegelpunkt *H´* von *H* an *Z*,
G	mit dem Spiegelpunkt *Y´* von *Y* an *Z*,
O	mit dem Spiegelpunkt *G´* von *G* an *Z*,
S	mit (dem Spiegelpunkt *S´* von *S* an) *Z*,

so verlaufen diese Verbindungsgeraden alle durch Punkt *F* (Abb.8).

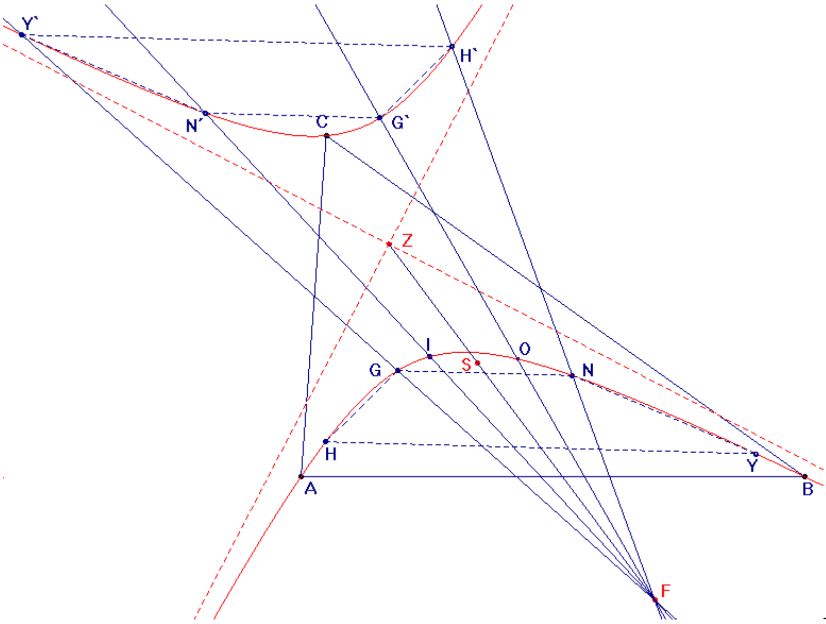

Abb.8

13. Die bisherigen Zusammenhänge lassen sich verallgemeinern (Abb.9):
Zu einem Dreieck *ABC* seien zwei *K*-konjugierte Punkte *P* und *Q* vorgegeben. Betrachtet wird das *K*-konjugierte Bild der Geraden *PQ*, d.h. der Kegelschnitt *k* durch die Punkte *A*,*B*,*C*,*P*,*Q* mit den Punkten $U = PK \cup k$ und $V = QK \cup k$. Benutzt werden die *K*-Konjugation (Index 0), *U*-Konjugation (Index 1) und *V*-Konjugation (Index 2).

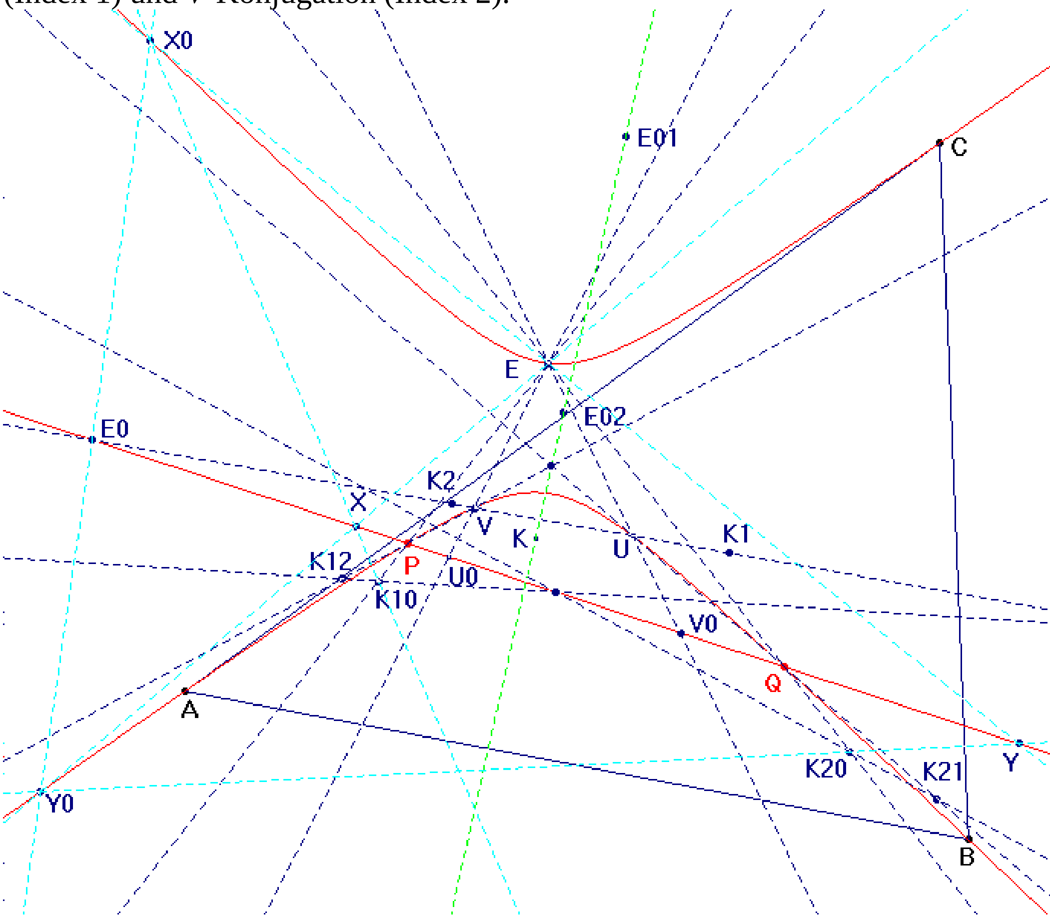

Abb.9

Die K-konjugierten Bilder U_0 und V_0 liegen auf PQ und die Verbindungsgeraden UV_0 und VU_0 schneiden sich in einem Punkt E auf k. Die Geraden PQ und UV schneiden sich im Punkt E_0, dem K-konjugierten Bild des Schnittpunktes E. Weiterhin liegen $K1$ und $K2$ auf UV und die Verbindungsgeraden ihrer K-konjugierten Bilder mit P und Q schneiden sich ebenfalls im Punkt E: $PK_{10} \cup QK_{20} = E$. Die Punkte K, E_{01}, E_{02} sind kollinear, und auf der Verbindungsgeraden liegt der Schnittpunkt von **PV** und QP. Der Punkt K_{12} liegt auf PV, der Punkt K_{21} auf QU und die Geraden $K_{10}K_{12}$ und $K_{20}K_{21}$ schneiden sich auf PQ. Die Schnittpunkte $X = PQ \cup KK_1$ und $Y = PQ \cup KK_2$ haben K-konjugierte Bilder X_0 und Y_0 auf k; die Verbindungsgerade X_0Y_0 geht durch E_0 und XY_0 und YX_0 schneiden sich in E.
Es empfiehlt sich, diese Zusammenhänge für die isogonal-konjugierten Partner Höhenschnittpunkt H und Umkreismitte M nachzuvollziehen.

14. Das Besondere der Punktekonstellation *INGO* liegt in der Parallelität von *NG* und *IO*. Geht man von isotom-konjugierten Punkten P und Q aus, so ist diese Parallelität von PQ und UV im Sinne der Bezeichnungen aus 13 immer gegeben.

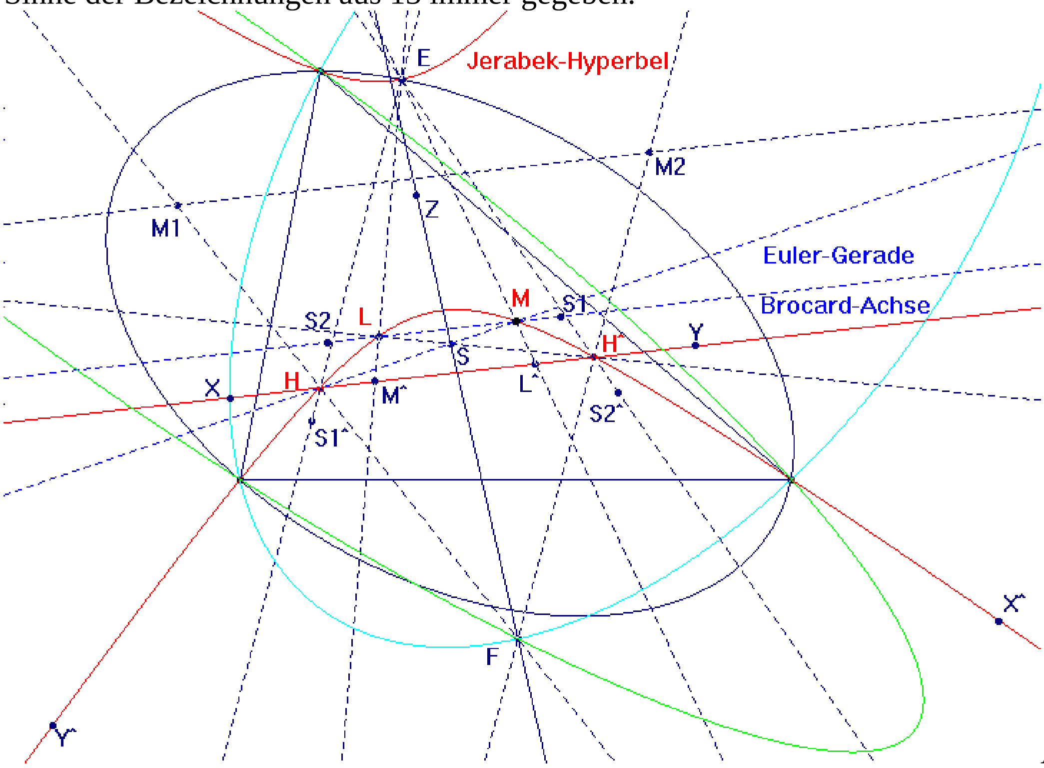

Abb.10

Hier sei abschließend eine diesbezügliche Punktekonstellation – ausgehend vom Höhenschnittpunkt H und seiem isotom-konjugierten Bild H^ – mit den Bezeichnungen aus 13 beschrieben, die viele ETC-vermerkte merkwürdige Punkte des Dreiecks enthält (Abb.10). Benutzt werden die isotome Konjugation (^) , die M-Konjugation (Index 1) und die L-Konjugation (Index 2):

$P = H = X(4)$, $Q = H\hat{} = X(69)$, $U = M = X(3)$, $V = L = X(6)$;
$UP = MH$ Euler-Gerade, $UV = ML$ Brocard-Achse,
$k(A,B,C,P,Q) = k(A,B,C,H,H\hat{})$ Jerabek-Hyperbel, $Z = X(125)$;
$U_0 = M\hat{} = X(264)$, $V_0 = L\hat{} = X(76)$ (3.Brocard-Punkt);
$E = ML\hat{} \cup M\hat{}L = X(290)$, $E_0 = E\hat{} = X(511)$ Fernpunkt;
$K1 = S1 = X(577)$, $K2 = S2 = X(32)$
$F = X(110)$ Brennpunkt der Kiepert-Parabel
$X = X(317)$, $X\hat{} = X(317)$, $Y = X(315)$, $Y\hat{} = X(66)$.

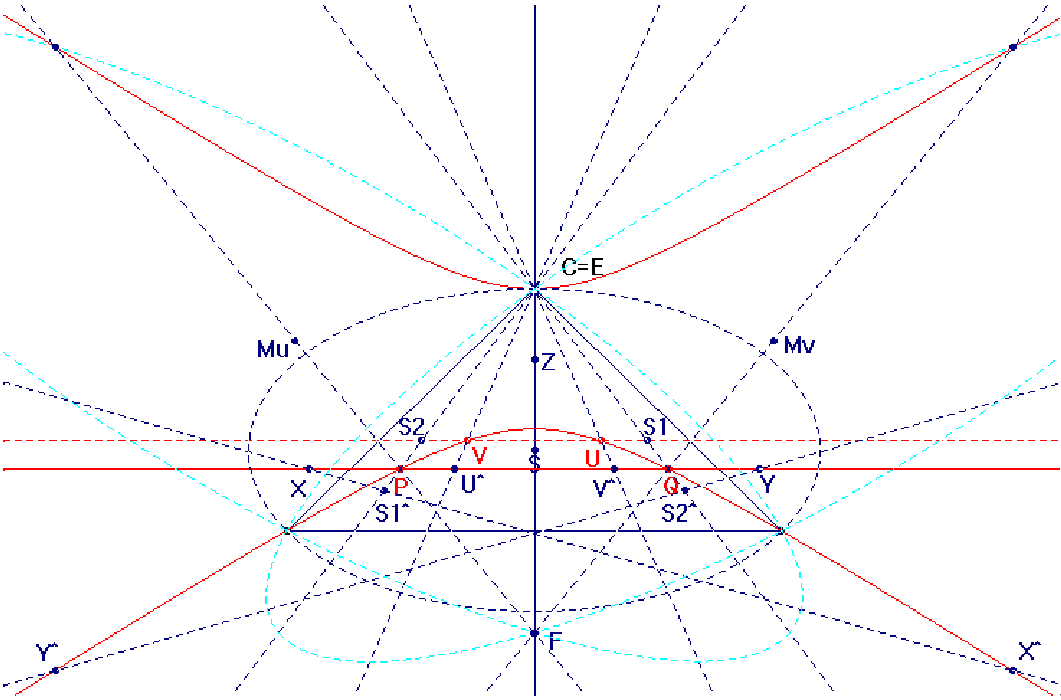

Abb.11

Die in 13 entwickelte Punktekonstellation erweist sich insbesondere für die isotome Konjugation als beziehungsreiches Netz vieler merkwürdiger Punkte des Dreiecks. Wählt man in einem gleichschenkligen Dreieck die isotom-konjugierten Punkte $P = AN \cup BG$ und $Q = BN \cup AG$, so erhält man eine symmetrische Abschlußfigur (Abb.11).

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de